「タイル」から「かけわり図」へ－乗除の指導

尾形正宏

1　「タイル」の有効性

具体的数から抽象的数へ

まずは，次の作文を読んでみてください。

> 小学校にはいってまもなく，たし算を習った。私の，算数への記憶は，このへんから始まる。先生がみんなに，小石くらいのおはじきを 20 個ずつくれて，それを使って，たし算の方法を教えてくれた。別に，むずかしいことはなかった。『 2 たす 1 は？』と聞かれたら，おはじきを 2 個取って，これに 1 個つけ加えてみる，3 個ある。2 たす 1 は 3 です。それは，私にもよくわかった。
> ところが何日かすると，先生が，おはじきを使わずにやってみましょうと言いだした。これがおそらく，私がつきあたった最初の壁だったと思う。2 たす 3 は？と聞かれる。私は初めに 2 という数字を思い浮かべ，次に 3 という数字を思い浮かべてみる。答えは 5 になるような気がするが，違うような気もする。もう一度，やってみる。それでも信じられない。そのうち，なんだか本当に違っているような気がしてきて，頭がこんがらがってくる。思わず手をのばして，おはじきでやってみる。 5 になった。それで初めて安心することができた」

（「さらばイヤミの数学よ」『のびのび』1977年6月号，『どうしたら算数ができるようになるか』より孫引き）

この作文は，子どもたちにとって，具体的数から抽象的数へと移行する時に大きな壁が存在することを，私たちに教えてくれます。

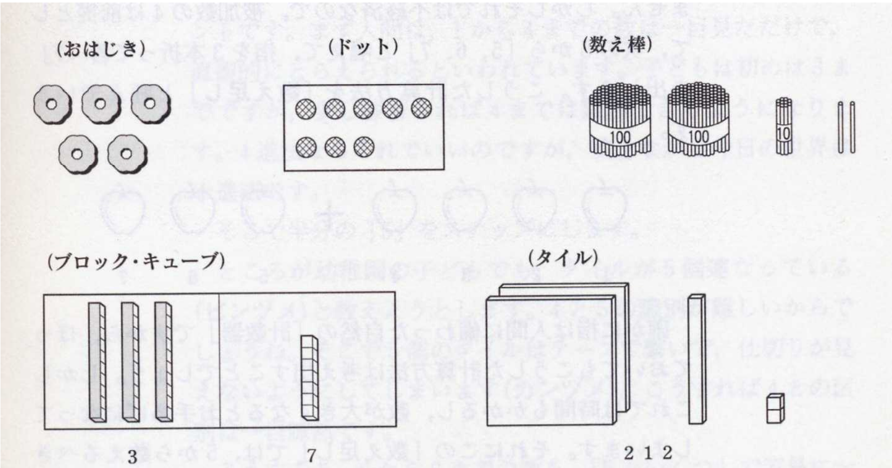
ここでいう「具体的数」とは，たとえばリンゴ 3 個なら「3 個」，鉛筆 3 本なら「3 本」のように，リンゴや鉛筆という要素に固着していてその姿が想い浮かぶ数（3 個，3 本）のことです。また「抽象的数」とは，その「3 個」「3 本」に共通するものとして「3」を取り出したその数（3）のことです。リンゴと鉛筆はどう見ても違うものなのに，抽象的思考を進めていくためにそれらを同じ「3」として表すのです。

このように，具体的数から抽象的数へと進むには，実は，大きなギャップがあるわけです。既に数の概念をつかんでしまった大人には理解できないことですが，そういうことがあるわけです。

そこで，この具体的数と抽象的数を橋渡しするものとしての「半具体物」（シェーマともいう）の存在が大切になるのです。

いろいろな半具体物

これまでの教科書では，いろいろな半具体物が用いられてきました。おはじき，ドット，数え棒，お金，色板，キューブ，タイルなどです。



おはじきや碁石などは，数えやすいのですが，束ねることが難しくて，位取りには不便です。その点，数え棒は束ねやすいのですが帯が必要ですし，100 本になると，10 束が 10 セットというイメージが得られません（図を見てください)。

お金はとても身近なのですが，両替という制度があって，約束事が必要です。しかも，お金がリンゴや鉛筆の話に結びつきにくいのではないでしょうか。ここある鉛筆 5 本を 5 円として…なんて子どもたちには難しいです。また，色板は色で区別するので，これまた約束事があり，煩雑さをぬぐいきれません。

そうなるとやはり，キューブとタイルが便利なようです。両方とも数えやすいし，結集力もあります。

一方，半具体物は半抽象物でもあります。モデルそのものに，あまり個性があったり，図に書きにくかったりするのでは，あとあとノートの上でノーミソの思考を表す時にも面倒です。その点，タイルは，平面的であり，フリーハンドでもノートに書けるというよさもあります。

すぐれたシェーマとしての「タイル」

そんなわけで，わたしは，教科書でどういう図が出ていようが，初任の時からタイルのみを使って指導をしてきました。

【コーヒーブレイク】　私が教師になった頃，「タイル」というシェーマや「水道方式」を考え出した数学教育協議会という団体が文部省を批判している…みたいなイデオロギー論が噴出することもあって，授業にタイルを使っているだけで，なんやかやと指導主事や校長から言われることもあったようです。幸いにも私は大丈夫でしたが…。それが，今じゃ，教科書にも，しっかり，タイルが載っています。イッタイアレハナンダッタノダ？？　子どもを中心とした教育実践をやっていれば，いつかは世の中も変わってくるということですね。

そういう意味では，今回紹介する「かけわり図」も，次第に教科書に載るようになってきました。

今使っている教科書の問題文に線分図が載っているからといって，未だに線分図のみで子どもを苦しめるのは，子どもの思考を無視していることになると思います。

それではタイルの優れた点をまとめてみます。

典型的な具体物である

まず，タイルそのものを具体物として扱えます。しかも，他の半具体物よりもその個性が弱いので，何にでも置き換えられそうです。

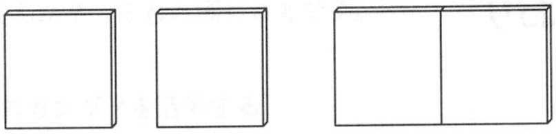
数えやすい

タイルはバラバラになるので，数えやすいです。

結集力が強い

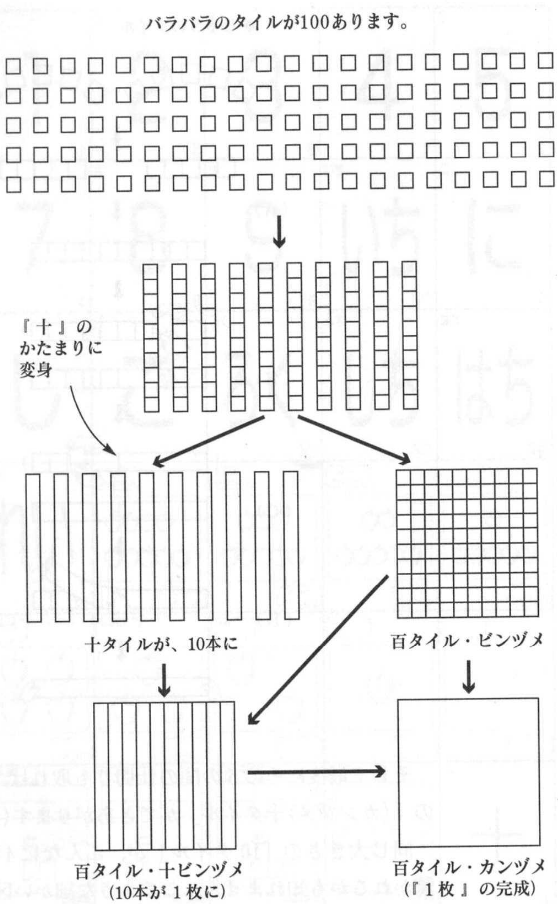
しかもタイルは〈まとめやすい〉という特徴があります。

タイルは，バラバラのままのタイルだと「1 と 1」ですが，2 つくっつけると「2」というまとまりになります。



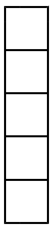
「1，1」　「2」

これがタイルの一番の強みです。この強みを生かして，位取りやかけわり図へと進むことができるのです。

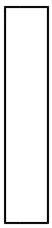


ただ，タイルが多くなると，一度にいくつあるか見分けにくくなります。そこで「5」集まったら，5 のカンヅメタイルを作ります。

要するに

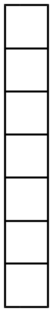


という 5 のタイルを

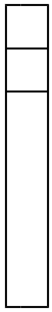


と表すのです。このタイルは中身が見えないので「カンヅメタイル」と呼んでいます。

そうすると，７は，



ではなく，



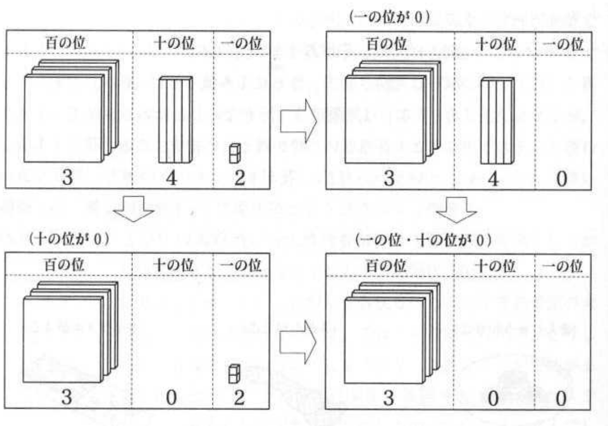
となるわけです。

どうです。分かりやすいでしょ。
このように，5 のタイルをまとめて長方形するというのは，位取りには関係ありませんが，慣れておいていいタイルです。

２　タイルと位取り

ここからは，東京書籍の教科書にも出ていることなので，読み飛ばしてもらっても構いません。

1 年生で，「11」のことを「101」と書いてしまう子がいます。
それが実はとても自然なことであるのは，「11」を漢字で書いてみると分かります。「11」は「十一」です。この漢字をそのまま算用数字にすると「十一」は「10」と「1」だから「101」となります。ね，普通でしょ。
このような表記をする子どもたちは，「1 から 9 の仲間として 10 がある」と思っているのです。ですから，数字の書き表し方が分かっていないのではなく，位取りという概念が分かっていないのです。「位取りなんて簡単だ！」と，大人は思うかも知れませんが，それは既に十進法の仕組みを知っているからです。10 の塊で次の位に移るんだよ…ってね。



それではみなさん，要らない紙にでも，二進法で数を書いてみてください。書けますか？　二進法は中学校で習うのか，習わないのか知りませんが…。パソコンの基礎・基本です。ヒントを言います…二進法は 2 の塊で次の位に移ります。さあ，書けますか？
位取りには「ゼロ」の概念が必要です。

「10」というのは「十の位」には「タイルが 1 本」あって,「一の位」には「なにもない」ことを表しているのです。なにもないから「0」と書いているのだということをとらえさせることができないと，あとあと，空位のある計算が出て来た時に混乱してしまいます。その意味でも，タイルは便利です。

3　タイルによる，かけ算の指導

かけ算の導入

かけ算の導入は，下のようになります（『わかるさんすう 2 より』。

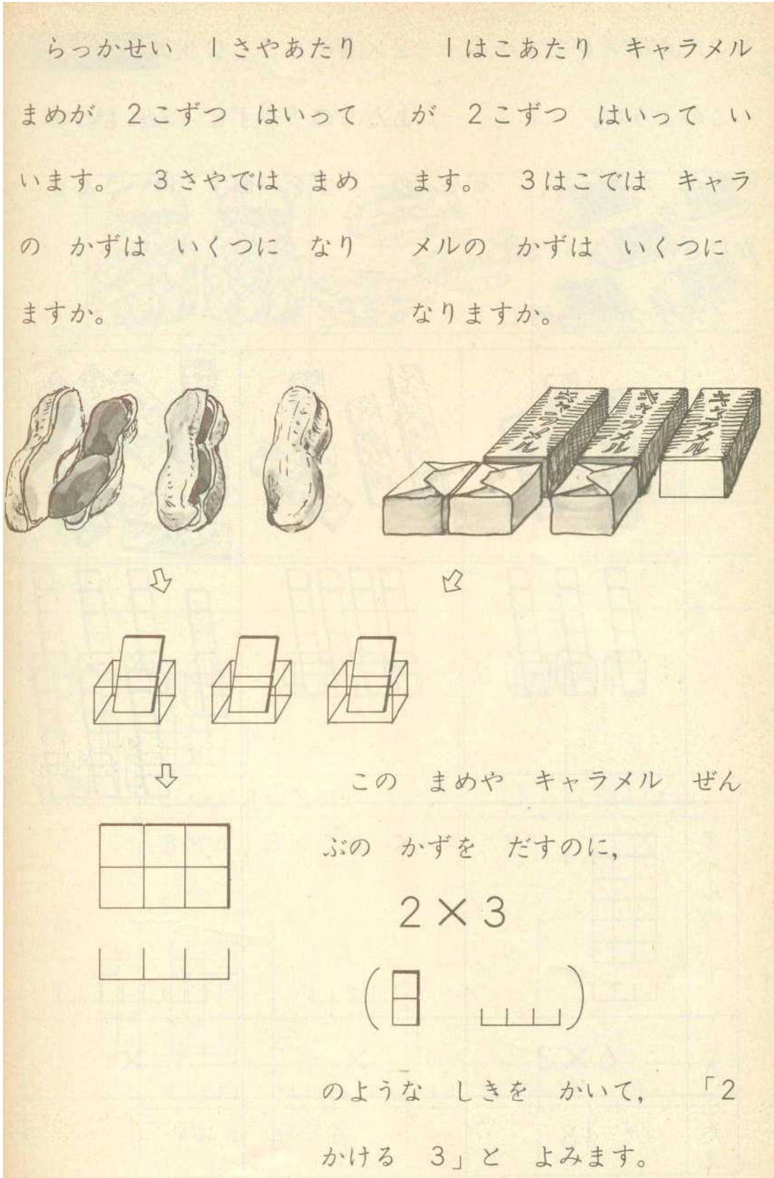
ここには，

○文章題
○具体的な絵
○半具体物としての箱とタイル
○さらに抽象化された線分図とタイル
○数の式
○タイルの式

が並んでいます。なんと丁寧なんでしょう。

このあとの練習問題にも，このようなプリントを用意することになるでしょう。

そして，九九の練習へと進みます。


らっかせい　1さやあたり　まめが　2こずつ　はいって　います。　3さやでは　まめの　かずは　いくつに　なりますか。

1はこあたり　キャラメルが　2こずつ　はいって　います。　3はこでは　キャラメルの　かずは　いくつに　なりますか。

この　まめや　キャラメル　ぜんぶの　かずを　だすのに，

2×3

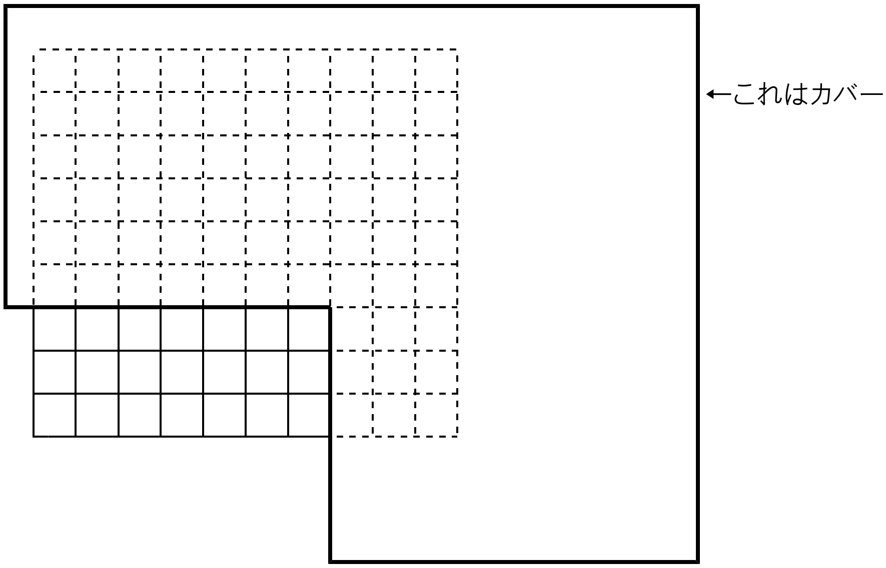
のような　しきを　かいて，「2かける　3」と　よみます。

九九の指導

では，タイルを使って行う九九の指導は，どのようなものでしょう。

タイルは正方形ですから，どこまででも隙間なくくっつけることができます（アレイ図だとこうはいきません)。そこで，次のような「しきつめタイル」を使って九九を指導します。

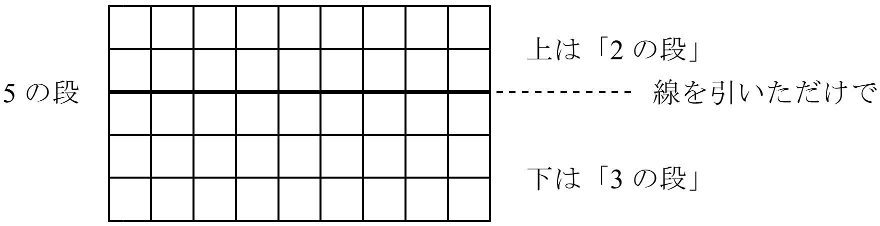
例えば，3 の段ならば，3 段分の高さのタイルを見えるようにしておいて，カバーを右へ平行移動させて現れたタイルの数が，そのまま 3 の段の数となるわけです。



このように九九を指導していくと，〈それぞれの九九はみんな長方形になること〉が分かります。この「かけ算＝長方形」というイメージは，のちほどの導入する「かけわり図」につながるだけでなく，倍数・約数の授業や面積の授業にも役立つことはおわかりですね。

2 年生の時から「九九のイメージを長方形で持っている」ことは，とても使い勝手のよいシェーマとなるのです。

たとえば，「5 の段は，2 の段と 3 の段をあせたものである…」みたいな指導も教科書にはあるようですが，このしきつめタイル図を見れば，当たり前ですね。



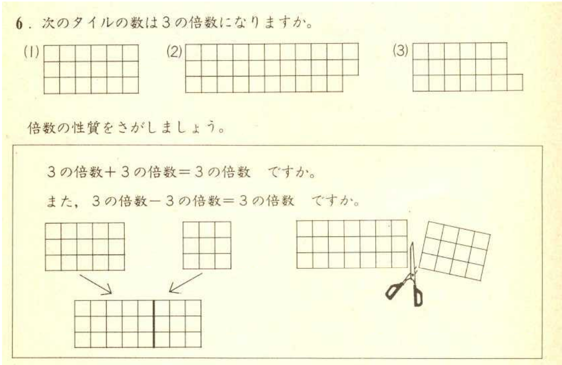
4　ちょっと道草…「かけ算＝長方形」のイメージの大切さ

かけ算のイメージを「長方形のタイル図」として身につけていると，どんないいことがあるのか，ここで，ちょっと寄り道をして，それを覗いてみることにしましょう。

倍数の指導で

Aという数の倍数をタイルであらわすと，Aの倍数というのは，
「縦のタイルの個数がAで，横を1倍，2倍…とのばしていった長方形になる」
ことが分かります。逆にある数（たとえばB）のタイルを縦A個で敷き詰めていったときに，長方形にならなければ，ある数BはAの倍数ではないということが一目で分かります。

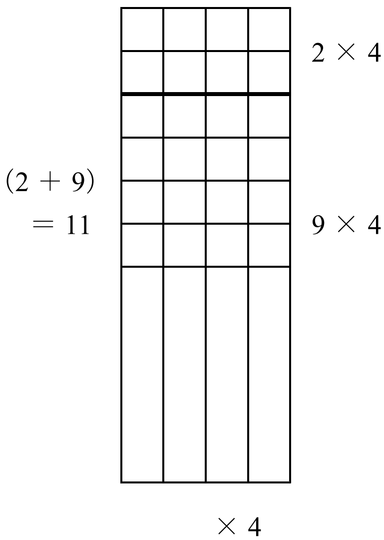
また，「3の倍数－3の倍数＝3の倍数」であることも，タイルを見れば一目瞭然。数をこねくり回す必要はありません。

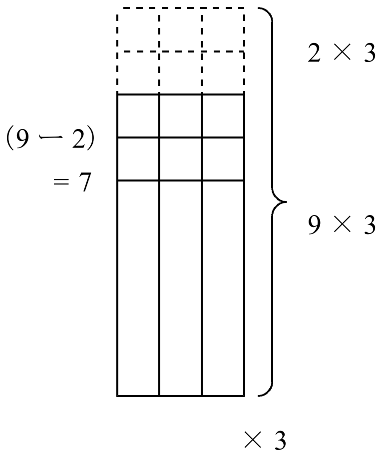


分配法則の指導で

このようにして指導されてきた子どもたちの頭の中には，〈全体量をあらわす数は長方形になる（かけ算と長方形に関連がある）〉というイメージができあがっています。これは，ずっと引きずっていていい，とても優れたイメージなのです。途中で変更する必要がない…というのは，すごく強い力を発揮します。

たとえば「（２＋９）×４＝？」「（９－２）×３＝？」という計算も，次のような図が書ければ，分配法則がすぐにイメージできます。



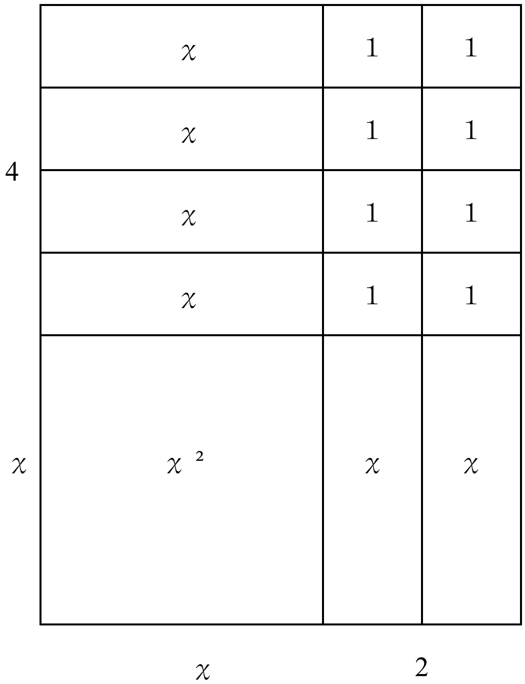


さらに，2 次式の展開では…

さらにういうと，中学校で習う，2 次式の展開問題，たとえば，

$$(\chi + 4) \times (\chi + 2) = ?$$

の展開を図をタイル図で書くと次のようになります。



$$(\chi + 4) \times (\chi + 2)$$

$$= \chi^2 + (4 + 2)\chi + 4 \times 2$$

$$= \chi^2 + 6\chi + 8$$

小学校 2 年生から 6 年生まで，小数・分数も含め，かけ算をタイル図としてイメージしてきた子どもたちにとって，中学校で上図のような説明をされたらどうでしょう。「とても分かりやすい」と感じるのではないでしょうか。もしかしたら，自分でこういう図を書ける子も出てくるかもしれません。

以上のことを踏まえると，小学校の時からタイル図を大いに駆使していくことが，のちのちの大きな力になることが分かるでしょう。

そして，

○×△＝□という式があったとき，

○をタイルの縦の長さ（タイルの数）

△をタイルの横の長さ（タイルの数）

と書くような練習をしておくといいでしょう。

5　かけわり図の導入から活用まで

それでは，「タイル」から「かけわり図」へと，説明を進めていきます。

「かけわり図」というのは，数学教育協議会で考えられた名称だと思います。一口に「かけわり図」といっても，どれくらい省略するか（抽象化するか）という段階により，様々な表し方があります。

2 年生でかけ算を習った時から，始めます。

扱う問題は，量×量，つまり，

「1あたり量」×「いくつ分」＝「全体量」

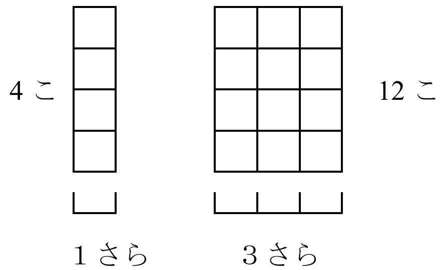
から始めます。

かけ算という演算は，どの「1 あたり」をとっても同じだからこそ適用できるのです。そういうことをしっかり納得させるためには，倍ではなく「1 あたり量」×「いくつ分」の導入の方が優れていると思います。「実際の世の中にある量の中から〈1 あた量〉りを取り出す」という練習も 2 年生から必要です（これをしておくと，5 年生での「単位量あたり」もすんなり進むことでしょう）。

基本のかけわり図（ビンヅメ図式）

最初は，下の図のように書きます。こういう図を私の師匠・新居信正先生（徳島・故人）は「ビンヅメ図式」と呼んでいました。タイルの時にも言いましたが，ビンヅメだから中身が見えるのです。

左側に 1 あたり量を書いておきます。これを書けないとかけ算ではないわけです。量の三用法の文章題では，まず，1 あたり量を見つけることが大切です。



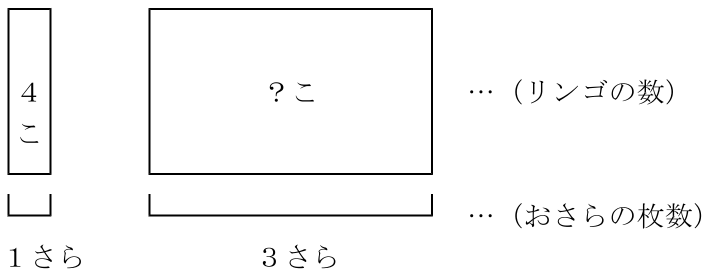
なお，参考書によっては，下の部分（ここでいえば「皿の数」）も線分図ではなく，タイルにしているものもあります。が，ここをタイルにすると，何を求めているのかがわかりにくくなってきますので私は使っていません。そちらの方がよかったという実践報告があれば，聞きたいです。

ただ，下の部分（いくつ分）を線分図にするためには，「線でいいよ」という連想ができる具体的な量を持ってきた方がいいでしょう。それが，リンゴをのせた「皿」であったり，荷物をのせた「トラックの荷台」であったり，ペンキを塗った「壁の広さ」だったりするわけです。

カンヅメ図式

かけ算の文章題を図に表すときには全体量は分かっていません。そこで次のような図になります。全体量の部分は「？」にしておきます。この図では，「4 こ」という部分にも，「全体量」の部分にもタイルが書いてありません。こういう図を私の師匠・新居信正先生は「カンヅメ図式」と呼んでいました。

この図には，単位（や助数詞）をしっかり書き入れておきます。すぐに「抽象数」だけにしないことも，半具体物として大切です。数学好きな人はすぐに数だけにしますが，算数が得意でない人にとってはそれが間違いにつながりやすくなります。



そして，この図と，

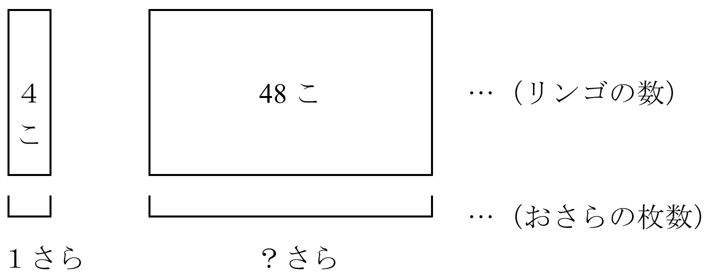
4 こ/さら×3 さら＝？こ

という式とを対応させる練習を何度も繰り返すことで，自分で使える「かけわり図」となっていきます。このとき，〈「1 さらの線分の長さの 3 倍を 3 さらの線分の長さにする」なんて考える必要がないこと〉も教えます。この「かけわり図（カンヅメ図式)」は，あくまで，〈量と量の関係を捉えているのだ〉というわけです。でも，2 年生のうちは，ある程度慣れるまで正確にやった方がいいと思います。

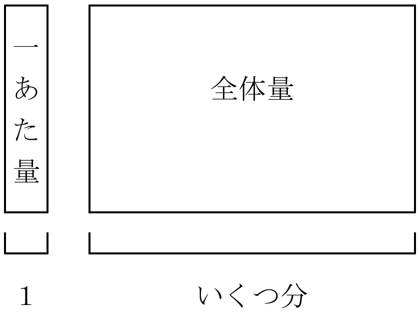
まあ，幅などは，分かっている量に合わせて忠実に書いてもいいのですが，数が多くなるとそれは不可能ですからね。ノートからはみ出ちゃいます。

なお，わり算の問題になると，図を数値に合わせて正確に書くことは，全く不可能になります。

例えば，次のようなかけわり図の場合，「？さら」の長さを忠実に書くことは，結局，わり算をすることと同じになるわけですからね。



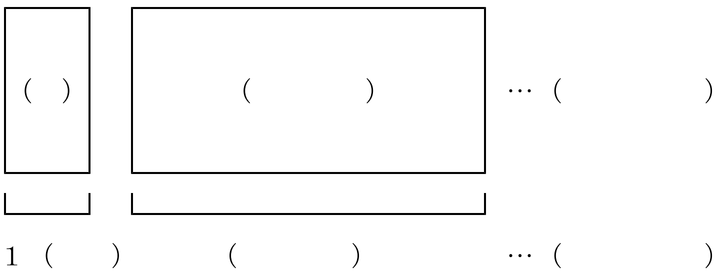
最後は，文章題を読んだり，式を見たりして，次のかけわり図が書けるようになるといいわけです。



3 年生での，かけ算・わり算の学習が終わってからは，この図を使って解いていくことになります。

私はよく高学年を担任してきました。それで，４月中には，かけわり図を使えるように，以下のようなことをしてきました。

> 下図のような「かけわり図の枠」を用意しておいて，「文章題を読んで，この図に量を記入していく」というプリントを子どもたちに徹底的にやらせます。このとき，文章題を最後まで解く（計算して答えを出す）わけではありません。〈量の三用法の文章題をかけわり図に正確に書き直す〉とういうことだけを取り出して練習させるのです。だから，計算もしません。かけわり図が間違っていれば，式も間違うし，式が間違って入れば，一生懸命計算しても意味がありませんからね。計算は計算機でもできますが，式を立てるのは「人間」なのですから。
>
> このとき，倍の問題はあえてやらせません。それは，それだけ取り上げて教えるべき内容が含まれているし，子どもたちが混乱するからです。



さらに簡略化

そして，最終的には，下図ような「かけわり図」を自分で書けるようにします。

市販テストを使っても，こういう図を余白にしっかり書くのです。そうすることで，演算をまちがえる子はほとんどいなくなります。

1あたり量	全体量
1	いくつ分

ただし，高学年からこういうことを始めると，算数が得意な子の中には，めんどくさがって図を書こうとしない子もいます。が，〈今まで「文章題が苦手だ」と言っていた子の方が自分より正確に解いていた〉ということが度々重なると，そんな子も図を書くようになります。まあ，算数の得意な子は，どんな図でもいいのです。ほおっておいても演算ができますからね。

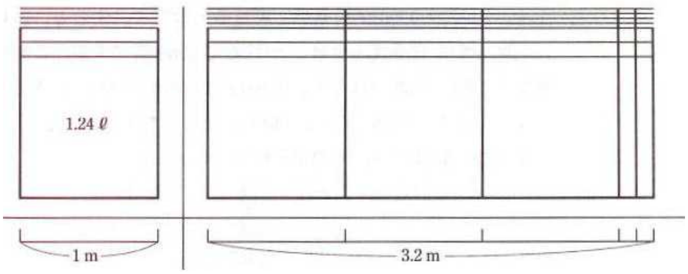
行きつ戻りつ

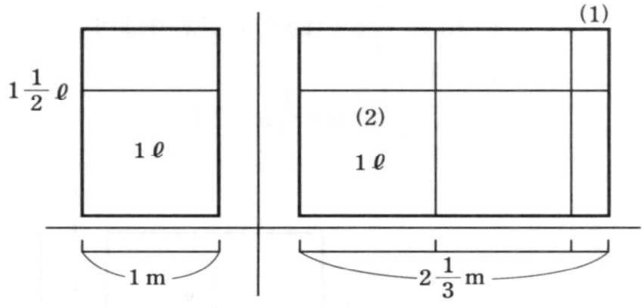
この「かけわり図」の活用は，「簡略化できれば終わり」ではありません。

子どもたちが新しい課題に突き当たった時には，もういちど「ビンヅメ図式」に戻って考える必要があります。

それは，例えば小数や分数の乗除の導入の場合です。

小数や分数の計算の仕組みを発見させていく場面では，「カンヅメ図式」を書いたあとで，もう一度タイルが見える「ビンヅメ図式」を書くことで，計算法則を発見させることができるのです。





割合への応用

かけわり図は，そのまま割合への応用が可能です。

一とみる量	比べられる量
1倍	割合（倍）

が，しかし，割合の文章題には，また違った難しさがあります。

それは，ひとつには〈日本語の言い回しによるものであること〉，また〈割合というのが量ではなくて関係（はたらき）を表す数であること〉から来るようです。要するに，「量と量の関係を表す数」は，それだけで抽象度が高いのです。ですから，その抽象的な数をイメージするための練習をしっかりしないと，かけわり図に置き換えることもできないのです。

「割合（倍）」については，本論とは関係ないので，これくらいにします。

最後に…最近思っていること

ここから以降は，私も迷いながら指導してきたことです。

私は，以前から

「量や割合の三用法の文章題は，χを使い，すべてかけ算で立式して解く」

というのを早くから教えればどうか…と思っています。要するに，「χを使って式を立て，そのχを求めていく」のです。一時期，小学校から$\chi \times 3 = 36$のような扱いがなくなったので困っていたのですが，今じゃ，6年生に出て来ます。しかも，

$$\begin{aligned} \square \times 3 &= 15 \\ \square &= 15 \div 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

なら，たぶん3年生から可能です。

今は，かけ算とわり算をしっかり習ったあとで，すべてかけ算で式を立ててわり算に持っていく…そういう指導がベターなのではないかと思っているわけです。

中学校へ行けば，おそらく「いきなりわり算の式を立てる」なんてないのではないでしょうか？　高校へ行けばなおさらです。中学校では，文字式が出て来て，

$\chi \times 3 = 3\chi$

として表します。要するにかけ算記号を省略するわけです。ついでに言うとわり算記

号は

　$\chi \div 3 = 3 / \chi$

と省略します。

　思えば，高学年で，

　÷ 2　は　× 1/2　で

　2 ÷ 3　は　2/3　で

置き換えられることを習います。こういうことは，中学校でどうつながっていて，さらに高校ではどうなっていくのか。そんなことも見通した学習を小学校現場でも展開したいものだと思っているのです。これは，私の今後の研究課題です。

　思っているのならやれよ～って思うのですが，なかなか踏ん切りが付かないんです。それは，〈すぐにわり算できる能力〉も，それはそれで必要な気もしているからです。

　皆さんの思いも聞きたいものです。

●参考

○中学校理科

電圧＝抵抗×電流（$E = RI$）　電力＝電圧×電流（$P = EI$）

熱量＝電力×時間（$Q=Pt$）　仕事＝力の大きさ×動かした距離（単位は，J＝Nm）

○高校理科

力の大きさ＝質量×加速度（$F = ma$）

運動エネルギー＝質量×速度の 2 乗× 1/2（$K = mv^2/2$）

位置エネルギー＝質量×重力加速度×高さ（$E = mgh$）

○三角形の面積の公式

小学校では　底辺×高さ÷２　→　中学校では　（1/2）ah

○比例の式

$y = a \times \chi$　→　$y = a\chi$

○反比例の式

$y = a \div \chi$　→　$y = a/\chi$　$\chi y = a$

引用文献

○遠山啓監修『わかるさんすう２』『わかるさんすう５』（むぎ書房・絶版）

○銀林浩編著『どうしたら算数ができるようになるか（小学校編）』（日本評論社，2001）

2012/10/15　記